
TD3 : Applications linéaires en dimension finie et dualité

Exercice 1. Préliminaire à faire chez soi

On se demande si les conditions proposées permettent de définir des applications linéaires. Le cas échéant, on demande de donner l'expression de $g(x, y)$ ou $g(x, y, z)$. Commentez les solutions données en italique.

1. $g(1, 0) = (2, -1)$, $g(0, 1) = (0, -1)$.
 - (a) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est libre dans \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (x, -x - y)$.*
 - (b) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est génératrice dans \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (2x, -x - y)$.*
 - (c) *La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 , donc g existe et est unique. On a $g(x, y) = (2x, -x + y)$.*
2. $g(1, 0) = (1, 2)$, $g(1, 1) = (2, 1)$, $g(-1, 1) = (0, 1)$.
 - (a) *La famille $\{(1, 0), (1, 1)\}$ est une base, ce qui permet de définir g . La valeur de g en $(-1, 1)$ peut être fixée arbitrairement. On a alors $g(x, y) = (x + y, 2x - y)$.*
 - (b) *Une telle application ne peut pas être linéaire car on a $(-1, 1) = -2(1, 0) + (1, 1)$ et $g(-1, 1) = (0, 1)$, alors que $-2g(1, 0) + g(1, 1) = (0, -3)$.*
3. $g(1, 1) = (1, 0, 0)$, $g(1, -1) = (2, 1, 1)$.
La famille $\{(1, 0, 0), (2, 1, 1)\}$ ne forme pas une base de \mathbb{R}^3 , les données proposées ne permettent donc pas de définir l'application g souhaitée.
4. $g(1, 0, 0) = (1, 2)$, $g(0, 1, 0) = (-1, 1)$.
La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est libre, ce qui permet de définir l'application g de façon unique. On a $g(x, y, z) = (x - y, 2x + y)$.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $f(x, y, z)$.
2. Trouver une base de $\text{Im} f$. Donner son équation dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. En déduire $\dim(\text{Ker} f)$. Donner une base de $\text{Ker} f$.
4. Vérifier que $\text{Ker} f$ et $A = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
5. Montrer que l'application linéaire g de A dans \mathbb{R}^3 définie par $g(1, 1, 0) = (1, 0, 3)$ et $g(1, 0, 1) = (1, 1, 7)$ est une bijection de A sur $\text{Im} f$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = P(2) + P(0)X$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que φ est linéaire.

2. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base $(1, X, X(X-2))$.
4. Déterminer $\text{Im}\varphi$ et $\text{Ker}\varphi$. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie par : pour toute matrice M ,

$$\varphi(M) = AM - MA$$

est une application linéaire.

2. Donner la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de φ dans la base canonique \mathcal{B} de \mathcal{M}_2 .
3. φ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E . On note T l'endomorphisme de E défini par

$$T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Ecrire la matrice de T dans \mathcal{E} .
2. Déterminer le noyau de T , et sa dimension.
3. On pose : $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrez que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
4. Calculez la matrice de T dans \mathcal{F} .
5. En déduire la nature de T .

Exercice 6. On considère \mathbb{R}^3 , sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $u(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Ecrire la matrice A de u dans la base \mathcal{E} .
3. Calculer A^2 en fonction de A et de I_3 . En déduire que A est inversible et déterminer u^{-1} .
4. Montrer que les vecteurs $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$ forment une base de \mathbb{R}^3 notée \mathcal{B} et écrire les matrices de passage P de \mathcal{E} à \mathcal{B} et P^{-1} de \mathcal{B} à \mathcal{E} .
5. Déterminer la matrice A' de u dans \mathcal{B} . Calculer A'^n , en déduire A^n puis l'expression de u^n .

Exercice 7. (*) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}f$ est de dimension inférieure ou égale à 1 (Indication : on pourra montrer que $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$).
2. En déduire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que $\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = g(u).v$.

Exercice 8. Soit la base de \mathbb{R}^n :

$$e_1 = (1, \dots, 1), e_2 = (0, 1, \dots, 1), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

1. Déterminer la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ duale de celle-ci.
2. En déduire l'annulateur de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$.

3. Décrire un système d'équations linéaires dont les solutions sont exactement tous les vecteurs de F (justifier votre réponse bien entendu).

Exercice 9. (*) Montrer que les formes linéaires

$$\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \quad \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Déterminer la base duale de celle-ci [en identifiant \mathbb{R}^3 avec $(\mathbb{R}^3)^{**}$.]
Remarque : après identification, on appelle la base de \mathbb{R}^3 obtenue la base *antéduale* de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercices complémentaires

Exercice 10. *En guise d'entraînement seul-e chez soi*

On considère \mathbb{R}^3 , sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et deux familles de vecteurs : $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $\mathcal{E}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ définies par

$$\begin{cases} e'_1 = 3e_1 + 2e_2 \\ e'_2 = e_1 \\ e'_3 = -e_1 + e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e''_1 = e'_1 \\ e''_2 = e'_2 - e'_3 \\ e''_3 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{cases}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

1. Vérifier que \mathcal{E}' , \mathcal{E}'' sont des bases de E et donner les matrices de passages P de \mathcal{E} à \mathcal{E}' , P' de \mathcal{E}' à \mathcal{E}'' et P'' de \mathcal{E} à \mathcal{E}'' ainsi que la matrice de passage de \mathcal{E}' à \mathcal{E} .
2. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
3. Ecrire la matrice $Mat(f, \mathcal{E})$, $Mat(f, \mathcal{E}', \mathcal{E})$ et $Mat(f, \mathcal{E}')$.

Des applications linéaires plus abstraites

Exercice 11. (*) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $s^2 = \text{Id}$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$ sont en somme directe
 - (b) Montrer que $\forall x \in E, \frac{1}{2}(x + s(x)) \in \text{Ker}(s - \text{Id})$
 - (c) Montrer que $\forall x \in E, \frac{1}{2}(x - s(x)) \in \text{Ker}(s + \text{Id})$
 - (d) En déduire que $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$ sont supplémentaires.
 - (e) Comment construire une base de E adaptée à la décomposition précédente ? Comment s'écrit la matrice de s dans cette base ?
2. Réciproquement, soient F et G deux supplémentaires dans E . Si $x = x_F + x_G$, on définit s par

$$s(x) = x_F - x_G.$$

[L'application s s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G .] Vérifier que s est une application linéaire, puis que $s^2 = \text{Id}$.

Exercice 12. (*) Soit E de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, i.e. il existe un entier k tel que $u^k = 0$. On note p le plus petit entier tel que $u^p = 0$. On suppose $p \geq 2$. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre dans E .

2. En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.
3. On suppose $p = n$. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.
4. Montrer que $u - \text{Id}_E$ est inversible. [Indication : considérer $\text{Id}_E + u + \dots + u^{p-1}$]

Exercice 13. (*) Soient E, F deux espaces vectoriels sur K et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On définit une application (dite *transposée* de f) :

$${}^t f : F^* \rightarrow E^*$$

en posant pour toutes $\varphi \in F^* : {}^t f(\varphi) := \varphi \circ f$.

1. Montrer que ${}^t f$ applique bien F^* dans E^* .
2. Montrer que ${}^t f$ est une application linéaire.
3. On suppose que E et F sont de dimension finie et soient $\{e_i\}, \{\varepsilon_j\}$ des bases de E et F respectivement, $\{\varphi_i\}, \{\psi_j\}$ leurs bases duales. On note $A = \text{Mat}(f)_{e_i, \varepsilon_j}$. Montrer que :

$$\text{Mat}({}^t f)_{\psi_i, \varphi_j} = {}^t A.$$